MATHÉMATIQUES I

Algèbre et analyse

Option économique

DURÉE : 4 heures

N.B. — *Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible...).*

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

PROBLÈME N° 1 (*sur 11 points*)

A

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R} - \{-1\}$, muni de l'addition usuelle des fonctions et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ respectivement par :

$$f_1(x) = x \operatorname{Log}[(x+1)^2]$$
$$f_2(x) = \operatorname{Log}[(x+1)^2]$$
$$f_3(x) = x$$

où Log désigne le logarithme népérien.

Soit E l'ensemble des combinaisons linéaires, à cœfficients réels, des 3 fonctions f_1, f_2, f_3.

1° Justifier la structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de E, puis montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ en est une base.

2° On considère la fonction :

$$h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 5(x+1) \operatorname{Log}[(x+1)^2] - 10x \end{array} \right.$$

Montrer que h est un élément de E, et donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

3° *a.* On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

b. En déduire la solution du système :

$$(S) \begin{cases} 2a + 2b + 3c = 5 \\ a + b + 4c = 5 \\ a - 2b + c = -10 \end{cases}$$

où a, b, c désignent trois inconnues réelles.

c. Montrer que le triplet (a, b, c), solution du système (S), peut s'interpréter comme le triplet des coordonnées de la fonction h dans une base $\mathcal{B}' = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ de E. (On déterminera φ_1, φ_2, φ_3 et on montrera que $\mathcal{B}'$ est une base de E.)

B

1° Étudier les variations de la fonction :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 10 \operatorname{Log}|x+1| \end{array} \right.$$

2° Étudier les branches infinies de la courbe (C_g) représentative de g.

E.S.C.A.E. 1983 224

3° Montrer que la courbe (C_φ) admet un axe de symétrie. Construire la courbe (C_φ) dans un repère orthonormé du plan (unité graphique : 1 cm).

4° Soit x un réel strictement positif.

a. Exprimer le réel C, en fonction de x, si la relation suivante est vérifiée :

$$g(x) = \text{Log}\,[(0{,}001)\,C]$$

b. Calculer C à 10^{-2} près par défaut pour $x = 0{,}15$ et pour $x = 0{,}05$.

c. Interpréter les résultats de 4° *a.* et 4° *b.*, si C est un capital exprimé en francs.

C

On considère la fonction f :

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 5\,(x+1)\,\text{Log}\,[(x+1)^2] - 10\,x & \text{si } x \neq -1 \\ 10 & \text{si } x = -1 \end{cases} \end{array} \right.$$

1° Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

2° Étudier les variations de f.

3° Préciser les branches infinies de la courbe (C_f) représentative de f.
Déterminer la tangente à (C_f) au point I $(-1{,}10)$.

4° *a.* Démontrer que l'équation $f(x) = m$, d'inconnue x strictement positive et de paramètre m strictement positif, admet une solution unique.

b. Déterminer x, élément de $\mathbb{R}_+^*$, solution de l'équation, pour m = 10.

c. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de la solution $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, de l'équation $f(x) = 5$.

5° Construire la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthogonal (unité en abscisse : 2 cm ; unité en ordonnée : 0,5 cm).

6° Calculer l'intégrale :

$$J(\alpha) \qquad \int_\alpha^0 f(x)\,dx$$

où $\alpha \in]-1{,}0[$.

Déterminer la limite de $J(\alpha)$ quand α tend vers -1. Interpréter graphiquement ce résultat.

PROBLÈME N° 2 (*sur 9 points*)

Les parties A, B, C, sont indépendantes

A

Le service « fabrication » d'une entreprise utilise deux ateliers A_1 et A_2. L'atelier A_1 élabore un produit semi-fini P_1, puis transporte chaque unité de P_1 dans l'atelier A_2 qui la transforme en une unité de produit fini P_2.

Le service « fabrication » produit mensuellement un nombre x d'unités du produit fini P_2 compris entre 500 et 2 000.

Les charges de ce service se composent de charges fixes qui s'élèvent mensuellement à 39 000 F et de charges variables qui sont actuellement de 84 F par unité de P_2 produite.

Souhaitant se réorganiser, le service « fabrication » envisage deux solutions :

1re solution : Fermer l'atelier A_2 en livrant les unités de P_1 à un sous-traitant qui les transformerait en unités du produit fini P_2, pour un coût unitaire inférieur de 6 F à celui de l'atelier A_2. On admet que les charges fixes mensuelles du service « fabrication » resteraient fixées à 39 000 F malgré la fermeture de A_2 ; il s'y ajouterait un montant mensuel forfaitaire de frais de transport fixé à 6 200 F.

2e solution : Remplacer une partie des machines de l'atelier A_1 par d'autres plus performantes. Ceci conduirait à une diminution de 10 F des charges variables par unité de P_2 produite, mais aussi à une augmentation des charges fixes mensuelles de 10 000 F.

1° Déterminer, selon la valeur de x, nombre d'unités de P_2 produites, la solution minimisant les charges globales du service « fabrication ».

2° On suppose désormais que le service « fabrication » a adopté la solution 2.

a. On note respectivement $f_1(x)$ et $f_2(x)$ les prix de revient unitaires de P_2, avant et après adoption de la solution 2, x désignant le nombre d'unités de P_2 produites.

Expliciter $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

Déterminer la production à partir de laquelle la solution 2 est intéressante.

Étudier succinctement et représenter graphiquement dans un même repère les fonctions f_1 et f_2. Retrouver graphiquement le résultat précédent.

b Le prix de vente d'une unité du produit P_2 est 144 F. Dans quelle mesure la production minimale que le service « fabrication » devait nécessairement avoir pour être rentable, en fonction de ce prix de vente et de sa structure, sera-t-elle modifiée par l'adoption de la solution 2? Retrouver ce résultat à l'aide du graphique établi en 2° *a*.

c. Si la production future, après adoption du projet 2, dépasse 1 800 unités, les charges variables par unité de P_2 produite sont modifiées et définies par :

$$74 \text{ F pour les } 1\,800 \text{ premières}$$

$$[\,74 + 0{,}1 \,.\, (x - 1\,800)\,] \text{ F pour les suivantes}$$

Déterminer alors le bénéfice global $b(x)$, pour une production mensuelle x supérieure à 1 800 unités.

(On admet que le prix de vente est maintenu à 144 F pour chacune des x unités produites.)

En déduire la production que l'entreprise devra viser pour obtenir un bénéfice maximal que l'on déterminera.

B

Le service « transport » de l'entreprise procède à l'expédition du produit P_2 et utilise pour cela des caisses achetées à un fabricant. Ce dernier commercialise deux types de caisses C_1 et C_2. Pour réaliser une caisse de type C_1, il faut 20 kg de bois, 20 clous, 10 vis et 1 h 30 minute de main-d'œuvre; pour réaliser une caisse de type C_2 il faut 10 kg de bois, 40 clous, 10 vis et 1 h de main-d'œuvre.

Le fabricant dispose de 7,5 tonnes de bois, de 9 000 clous, de 3000 vis et de 360 heures de main-d'œuvre par semaine. Les caisses C_1 et C_2 sont vendues respectivement 125 F et 100 F.

1° Déterminer le programme de fabrication qui procure un bénéfice maximal.

2° Même question, si la quantité de bois disponible par semaine n'est que 3,6 tonnes.

C

Les différents services de l'entreprise reçoivent des prestations des autres services.

Le service « administratif » a travaillé 10 000 heures dont 300 h pour le service « fabrication » et 2 520 h pour le service « transport ».

Le service « fabrication » a travaillé 9 000 h dont 400 h pour le service « administratif » et 280 h pour le service « transport ».

Le service « transport » a travaillé 8 960 h dont 800 h pour le service « administratif » et 600 h pour le service « fabrication ».

Les dépenses des services « administratif », « fabrication », « transport », s'élèvent respectivement à 376 400 F, 504 900 F et 206 360 F, auxquelles s'ajoutent pour chacun d'eux les coûts des prestations reçues des deux autres services.

Déterminer le coût horaire de chaque service.